

Die Aufgabenstellungen und weitere aktuelle Informationen zu den Übungen finden Sie stets unter <http://www.informatik.uni-leipzig.de/~rhartwig/>

Aufgabenblatt 5

1. Gegeben ist eine Signatur Σ , die das zweistellige Funktionssymbol \circ und das zweistellige Prädikatsymbol \leq enthält. Betrachten Sie dazu die in der Tabelle gegebenen Strukturen über Σ :

Struktur	Universum	\circ	\leq
A_1	\mathbb{N}	Multiplikation	ist Teiler von
A_2	\mathbb{N}	max	das übliche \leq
A_3	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	punktweise Addition	$f \leq g := \forall x (f(x) \leq g(x))$

und die Formeln

$$F_1 := x \leq y \wedge x \leq z \rightarrow x \leq y \circ z$$

$$F_2 := \forall x (x \circ y = x)$$

$$F_3 := x \leq z \wedge y \leq z \rightarrow x \circ y \leq z$$

$$F_4 := x \leq y \vee x = y \vee y \leq x$$

Geben Sie für jedes i und k an, ob F_i in A_k

a) erfüllbar,

b) gültig ist.

Dabei bedeutet $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Menge aller einstellig reellen Funktionen.

2. Wir betrachten eine Signatur mit einem zweistelligen Funktionssymbol g und einer Konstanten (nullstelliges Funktionssymbol) e . Gegeben sei die Formelmengen $X = \{G_1, G_2, G_3\}$ mit

$$G_1 := \forall x (g(x, e) = x)$$

$$G_2 := \forall x \forall y \forall z (g(g(x, y), z) = g(x, g(y, z)))$$

$$G_3 := \forall x \exists y (g(x, y) = e)$$

Suchen Sie

a) ein unendliches Modell für X ,

b) ein endliches Modell für X ,

c) eine Formel F mit $X \models F$.

3. Bestimmen Sie pränex Normalformen von

$$\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \rightarrow \forall y \exists z Q(y, z) \\ \exists x \forall y \neg P(y, x) \vee \forall x R(x, z)$$

4. Transformieren Sie in Skolemische Normalform:

$$\forall x \exists y \forall z \exists w (\neg P(a, w) \vee Q(f(x), y)) \\ \forall z \exists y (P(x, g(y), z) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg \forall z \exists x \neg R(f(x, z), z)$$

Bitte wenden!

5. Betrachten Sie eine Signatur mit einem einstelligen Prädikatensymbol P , einem einstelligen Funktionssymbol f und einer Konstanten c und suchen Sie für die Formel

$$P(c) \wedge \forall x (f(f(x)) = x)$$

- a) ein Modell der Größe 4, d.h. mit genau vier Elementen,
- b) ein abzählbar unendliches Modell,
- c) ein kanonisches Modell.

Sind Ihre für a) und b) gefundenen Modelle kanonisch?

Wieviel Elemente kann ein kanonisches Modell der gegebenen Formel höchstens haben? Überlegen Sie sich dazu zunächst, welche Terme es zu der gegebenen Signatur überhaupt gibt.

Anmerkung: Ein Modell heißt *kanonisch* gdw. jedes Element des Universums Interpretation eines variablenfreien Terms ist.

Späteste Abgabe der Lösungen:

Mittwoch, 2. Juli 2003, 17.10 Uhr, d.h. **vor** Beginn der Vorlesung